

计算问题

计算问题不仅在国家公务员考试中经常出现，在各个地方省市公务员考试中，一般都出现在前几个题中，着重考察考生速算与巧算的能力。

常用的 10 种计算技巧

错位相减

一般地，通项形如 $A_n \times B_n$ （其中 A_n 为等差数列， B_n 为等比数列）的数列求和问题，可以考虑采用错位相减法。

例题 1. 求和： $S_n = 1 + 3x + 5x^2 + 7x^3 + \cdots + (2n-1)x^{n-1}$ ①

解：由题可知， $\{(2n-1)x^{n-1}\}$ 的通项是等差数列 $\{2n-1\}$ 的通项与等比数列 $\{x^{n-1}\}$ 的通项之积，故我们采用错位相减求和。

设 $xS_n = 1x + 3x^2 + 5x^3 + 7x^4 + \cdots + (2n-1)x^n$ ② （设制错位）

①-②得 $(1-x)S_n = 1 + 2x + 2x^2 + 2x^3 + 2x^4 + \cdots + 2x^{n-1} - (2n-1)x^n$ （错位相减）

再利用等比数列的求和公式得： $(1-x)S_n = 1 + 2x \cdot \frac{1-x^{n-1}}{1-x} - (2n-1)x^n$

$$S_n = \frac{(2n-1)x^{n+1} - (2n+1)x^n + (1+x)}{(1-x)^2}$$

例题 2. 求数列 $\frac{2}{2}, \frac{4}{2^2}, \frac{6}{2^3}, \cdots, \frac{2n}{2^n}, \cdots$ 前 n 项的和。

解析：由题可知， $\{\frac{2n}{2^n}\}$ 的通项是等差数列 $\{2n\}$ 的通项与等比数列 $\{\frac{1}{2^n}\}$ 的通项之积

$$S_n = \frac{2}{2} + \frac{4}{2^2} + \frac{6}{2^3} + \cdots + \frac{2n}{2^n} \text{①}$$

$$\frac{1}{2}S_n = \frac{2}{2^2} + \frac{4}{2^3} + \frac{6}{2^4} + \cdots + \frac{2n}{2^{n+1}} \text{② （设制错位）}$$

$$\text{①-②得 } (1-\frac{1}{2})S_n = \frac{2}{2} + \frac{2}{2^2} + \frac{2}{2^3} + \frac{2}{2^4} + \cdots + \frac{2}{2^n} - \frac{2n}{2^{n+1}} \text{ （错位相减）}$$

$$= 2 - \frac{1}{2^{n-1}} - \frac{2n}{2^{n+1}}$$

$$\therefore S_n = 4 - \frac{n+2}{2^{n-1}}$$